Your Name
or
Institution Logo

গণিত

(স্মার্ট নোট্স)

দশম শ্রেণির জন্য

অধ্যায় ১

একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ

আজকে আমরা একটি মজার বিষয় নিয়ে আলোচনা করবো। যা প্রাথমিকভাবে তোমাদের খুব কঠিন মনে হলেও বিষয়টি জানার পরে তোমাদের খুব সহজ মনে হবে।

হ্যাঁ, তোমরা একদম ঠিক ধরেছো আমি দ্বিঘাত সমীকরণের কথা বলছি।

এই অধ্যায়ের মূল বিষয় নিয়ে আলোচনা করার আগে আমাদের জানতে হবে—

1. **দ্বিঘাত সমীকরণ কি?**
2. **আমরা কেন এই অধ্যায় পড়বো?**
3. **এই অধ্যায় প্রয়োগ করে আমরা কি কোনো বাস্তব সমস্যার সমাধান করতে পারব?**

এই রকম অনেক প্রশ্ন তোমাদের মনে আসতে পারে। আর এই রকম সমস্ত প্রশ্নের উত্তর তোমরা এই অধ্যায়ে খুঁজে পাবে।

■ **আচ্ছা বলতো, একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কি করে নির্ণয় করবে?**

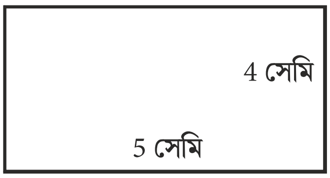
➢ তোমরা বলবে স্যার এটা তো খুবই সহজ প্রশ্ন।

বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (বাহুর দৈর্ঘ্য)^2

■ **আচ্ছা এবার বলতো একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত?**

➢ তোমরা বলবে, স্যার আপনিতো খুবই সহজ সহজ প্রশ্ন করছেন;

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = দৈর্ঘ্য × প্রস্থ



এক্ষেত্রে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = 5 সেমি × 4 সেমি = 20 বর্গ সেমি।

□ আচ্ছা এবার প্রশ্নটা একটু ঘুরিয়ে করছি দেখো তো উত্তর দিতে পারো কিনা—

■ **একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের তুলনায় 5 মিটার বেশি হলে, আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কত হবে?**

➢ **তোমরা বলবে, স্যার ক্ষেত্রফল কি করে নির্ণয় করব?**

এই প্রশ্নে দৈর্ঘ্য বা প্রস্থের কোনো নির্দিষ্ট মানই দেওয়া নেই। এদের মধ্যে একটি সম্পর্ক দেওয়া আছে।

যেভাবে তোমরা আগের প্রশ্নের উত্তর দিয়েছো ঠিক একইভাবে এই প্রশ্নেরও সমাধান করতে হবে।

লক্ষ্য করো, প্রশ্নে বলা আছে আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের তুলনায় 5 মিটার বেশি।

অর্থাৎ আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ যাই হোক না কেন, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য 5 মিটার বেশি হবে।

এখন মনে করো, আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ হবে x মিটার।

তাহলে, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য হবে $(x + 5)$ মিটার।

আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল হবে দৈর্ঘ্য × প্রস্থ = $[(x + 5) \times x]$ বর্গ মিটার = $(x^2 + 5x)$ বর্গ মিটার

এই $(x^2 + 5x)$ জাতীয় রাশিকে আমরা একচলের বীজগাণিতিক রাশিমালা বলি।

এখন তোমাদের মনে প্রশ্ন আসতেই পারে।

◆ **চল কাকে বলে?**

➢ যে কোনো পরিবর্তনশীল পদকে চল [Variable] বলা হয়।

কিন্তু একটি গুরুত্বপূর্ণ বিষয় তোমাদের সবসময় মনে রাখতে হবে। চল মানেই কিন্তু চলরাশি নয়। চলের সঙ্গে আমরা একক যুক্ত করলে চলরাশি পাই।

অর্থাৎ, **চল + একক = চলরাশি**

■ আচ্ছা দেখোতো, পূর্বের প্রশ্নটাকে আমি আরও একটু ঘুরিয়ে করছি উত্তর দিতে পারো কিনা—

একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য প্রস্থের তুলনায় 5 মিটার বেশি এবং আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 50 বর্গমিটার হলে, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মান নির্ণয় করো।

➤ পূর্বের প্রশ্নের মতো একইভাবে আমরা দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মধ্যে সম্পর্ক নির্ণয় করতে পারি।

মনে করো, আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ $= x$ মিটার।

তাহলে আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য $= (x + 5)$ মিটার

সুতরাং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল,

$=$ দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ

$= [(x + 5) \times x]$ বর্গ মিটার

$= (x^2 + 5x)$ বর্গ মিটার

এখন লক্ষ্য করো প্রশ্নে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল 50 বর্গ মিটার বলা আছে।

অর্থাৎ আমরা বলতেই পারি এই $(x^2 + 5x)$ রাশিটির মান 50 বর্গ মিটার-এর সমান হবে।

সুতরাং $x^2 + 5x = 50$

➤ $x^2 + 5x = 50$ এই জাতীয় সমীকরণকে আমরা **একচলের দ্বিঘাত সমীকরণ (Qudratic Equation of one Variable)** বলি।

■ **এখন তোমাদের মনে আবার প্রশ্ন আসতে পারে, দ্বিঘাত সমীকরণ-এর অর্থ কি?**

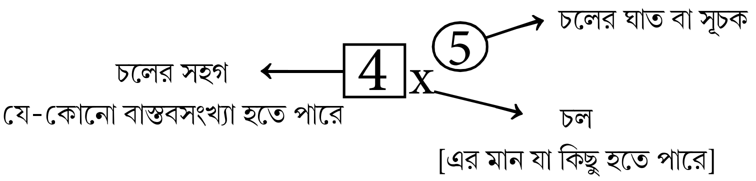
➤ সমীকরণটিকে দ্বিঘাত বলা হচ্ছে কারণ এক্ষেত্রে চলের সর্বোচ্চ ঘাত '2'।

অর্থাৎ যে কোনো একচলবিশিষ্ট সমীকরণে চলের সর্বোচ্চ ঘাত '2' হলে, সমীকরণটিকে একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়।

একচলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার, $ax^2 + bx + c = 0$

যেখানে $a(\neq 0)$, b, c বাস্তব সংখ্যা।

গুরুত্বপূর্ণ বিষয়



◆ **দ্বিঘাত সমীকরণ :**

কোনো সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ বা বৃহত্তম ঘাত বা সূচক দুই হলে, তাকে দুই ঘাত বিশিষ্ট সমীকরণ বা দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়।

অজ্ঞাত রাশি 'x' এর দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার,

$ax^2 + bx + c = 0$ **[$a(\neq 0)$, b, c বাস্তব সংখ্যা]**

এখানে, **a = 'x^2'-এর সহগ**

b = 'x'-এর সহগ

c = ধ্রুবক পদ

মনে রেখো, উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণে 'x^2'-এর সহগ [a এর মান] শূন্য হলে সমীকরণটি একটি **একঘাত বা রৈখিক সমীকরণ** [Linear Equation] হবে।

এক ঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার,

$bx + c = 0$ [b($\neq$ 0), c বাস্তব সংখ্যা]

দ্বিঘাত সমীকরণ দুই প্রকারের হয়,

- **বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ :**

যে দ্বিঘাত সমীকরণে শুধুই দুই সূচকযুক্ত পদ থাকে কিন্তু এক সূচকসম্পন্ন কোনো পদ থাকে না, তাকে বিশুদ্ধ দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ : **a)** $x^2 - 25 = 0$ **b)** $2x^2 - 72 = 0$

- **অবিশুদ্ধ বা মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ :**

যে দ্বিঘাত সমীকরণে অজ্ঞাত রাশির এক ও দুই উভয় সূচকযুক্ত পদ থাকে, তাকে মিশ্র দ্বিঘাত সমীকরণ বলা হয়।

উদাহরণ : **a)** $3x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $x^2 + 6x - 16 = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের পদ্ধতি

দুটি ভিন্ন প্রক্রিয়ার মাধ্যমে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান করা যায়। প্রক্রিয়া দুটি হল—

1. **উৎপাদকে বিশ্লেষণ বা মধ্যপদ বিশ্লেষণ।**
2. **শ্রীধর আচার্যের সূত্র।**

1. উৎপাদকে বিশ্লেষণ বা মধ্যপদ বিশ্লেষণ :

মনেকরি, অজ্ঞাত রাশি x-এর দ্বিঘাত সমীকরণ হল,

$ax^2 + bx + c = 0$ [a($\neq$ 0), b, c বাস্তব সংখ্যা]

উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধানের পদ্ধতি নিচে বিশ্লেষণ করা হল।

i. **প্রথম পদক্ষেপ** : x^2 এর সহগ ও ধ্রুবক পদের গুণফল নির্ণয় করতে হবে। অর্থাৎ ac-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

ii. **দ্বিতীয় পদক্ষেপ** : ধ্রুবক পদের সম্মুখে যে চিহ্ন আছে, সেই চিহ্নের সাপেক্ষে মধ্যপদকে বিশ্লেষণ করতে হবে। অর্থাৎ ধ্রুবকপদ ধনাত্মক হলে মধ্যপদকে দুটি সংখ্যার যোগ আকারে এবং ধ্রুবকপদ ঋণাত্মক হলে মধ্যপদকে দুটি সংখ্যার বিয়োগ আকারে বিশ্লেষণ করতে হবে।

iii. **তৃতীয় পদক্ষেপ** : এমন দুটি সংখ্যা চিহ্নিত করতে হবে যাদের গুণফল ac এবং যাদের যোগফল **(ধ্রুবকপদ ধনাত্মক হলে)** বা বিয়োগফল **(ধ্রুবকপদ ঋণাত্মক হলে)** দ্বিধাত সমীকরণের মধ্যপদের সহগ b হয়।

iv. **চতুর্থ পদক্ষেপ** : এরপর সরলীকরণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণকে দুটি উৎপাদকের গুণফল আকারে প্রকাশ করতে হবে।

v. **পঞ্চম পদক্ষেপ** : সর্বশেষে উভয় উৎপাদককে শূন্যের সাথে তুলনা করে x-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

একটি উদাহরণের মাধ্যমে উল্লেখিত পদক্ষেপ গুলো বিশ্লেষণ করা হল।

$3x^2 + 5x - 2 = 0$

1. উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণে 'x^2' এর সহগ (3) এবং ধ্রুবক পদ (2) এর গুণফল হল, $3 \times 2 = 6$

2. দ্বিঘাত সমীকরণকে $\mathbf{3x^2 + (\quad)x - 2 = 0}$ আকারে লিখতে হবে।

3. এক্ষেত্রে ধ্রুবকপদ ঋণাত্মক তাই মধ্য সহগকে দুটি সংখ্যার বিয়োগ আকারে লিখতে হবে।

$$\mathbf{3x^2 + (\ -\ )x - 2 = 0}$$

4. এখন আমরা 6 কে **(1, 6)** ও **(2, 3)** এই দুটি জোড়ে বিভাজন করতে পারি। দুটি জোড়ের মধ্যে শুধুমাত্র **(1, 6)** জোড়ের ক্ষেত্রে সংখ্যা দুটি বিয়োগফল **(6 – 1)** দ্বিঘাত সমীকরণের মধ্যপদের সহগ অর্থাৎ '5' এর সমান হবে।

$$\mathbf{3x^2 + (6 - 1)x - 2 = 0}$$

5. এরপর সরলীকরণ প্রক্রিয়ার মাধ্যমে দ্বিঘাত সমীকরণটি দুটি উৎপাদকের গুণফল আকারে প্রকাশ করতে হবে।

$$\mathbf{(x + 2)(3x - 1) = 0}$$

6. সর্বশেষে উভয় উৎপাদককে শূন্যের সাথে তুলনা করে x-এর মান নির্ণয় করতে হবে।

হয়,	**অথবা**
$\mathbf{x + 2 = 0}$	$\mathbf{3x - 1 = 0}$
বা, $\mathbf{x = -2}$	**বা,** $\mathbf{3x = 1}$
	বা, $\mathbf{x = \frac{1}{3}}$

$\mathbf{3x^2 + 5x - 2 = 0}$

বা, $\mathbf{3x^2 + (6 - 1)x - 2 = 0}$

বা, $\mathbf{3x^2 + 6x - x - 2 = 0}$

বা, $\mathbf{3x(x + 2) - 1(x + 2) = 0}$

বা, $\mathbf{(x + 2)(3x - 1) = 0}$

হয়,	**অথবা**
$\mathbf{x + 2 = 0}$	$\mathbf{3x - 1 = 0}$
বা, $\mathbf{x = -2}$	**বা,** $\mathbf{3x = 1}$
	বা, $\mathbf{x = \frac{1}{3}}$

∴ **প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান,** $\mathbf{x = -2}$ **ও** $\mathbf{x = \frac{1}{3}}$

2. শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র :

মনেকরি, অজ্ঞাত রাশি x-এর দ্বিঘাত সমীকরণ হল,

$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ **[a (≠ 0), b, c, বাস্তব সংখ্যা]**

উভয়পক্ষকে **a (≠ 0)** দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 + 2.x.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$

বা, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

উভয়পক্ষের বর্গমূল নির্ণয় করে পাই

$$\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

বা, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}$, যখন $b^2 - 4ac \geq 0$,

বা, $x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{1}{2a}\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)$

বা, $x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$$\therefore \boxed{\mathbf{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}}}$$

$ax^2 + bx + c = 0$ $[a \neq 0]$ সমীকরণের বীজ দুটি হল $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ও $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$।

মনে রেখো, যদি **$b^2 - 4ac \geq 0$ হয়** তবেই $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের দুটি বাস্তব বীজ পাওয়া যাবে।
যদি $b^2 - 4ac < 0$ তাহলে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ পাওয়া যাবে না।

◆ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় :

মনেকরি, চলরাশি x-এর দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার

$ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

যেখানে, $a(\neq 0)$, b, c বাস্তব সংখ্যা।

(i) নং দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ... ... (ii)

অর্থাৎ (i) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ও $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$।

(i) নং সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি বর্গমূল চিহ্নের মধ্যস্থিত **$b^2 - 4ac$** এর উপর নির্ভর করে।
এই $b^2 - 4ac$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের **নিরূপক [Discriminant]** বলা হয়।

☐ **প্রথম ক্ষেত্র : যদি নিরূপক $(b^2 - 4ac) = 0$ হয়,** (ii) নং থেকে পাই, $x = \frac{-b \pm 0}{2a}$

এক্ষেত্রে (i) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $-\frac{b}{2a}$ ও $-\frac{b}{2a}$ হবে। অর্থাৎ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক শূন্য হলে বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।

☐ **দ্বিতীয় ক্ষেত্র :** যদি **নিরূপক $(b^2 - 4ac) > 0$ হয়,** (ii) নং থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

এক্ষেত্রে (i) নং সমীকরণের বীজদ্বয় $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ও $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ হবে।

অর্থাৎ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক ধনাত্মক হলে বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।
পুনরায়, $(b^2 - 4ac)$ ধনাত্মক ও পূর্ণবর্গ রাশি হলে বীজদ্বয় মূলদ হবে। $(b^2 - 4ac)$ ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণবর্গ রাশি না হলে বীজদ্বয় অমূলদ হবে।

☐ **তৃতীয় ক্ষেত্র : যদি নিরূপক $(b^2 - 4ac) < 0$ হয়,** তাহলে (i) নং সমীকরণের কোনো বাস্তব বীজ পাওয়া যাবে না।
অর্থাৎ কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের নিরূপক ঋণাত্মক হলে বীজদ্বয় অবাস্তব বা কাল্পনিক ও অসমান হবে।

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ও সহগের সম্বন্ধ :

ধরি, অজ্ঞাত রাশি 'x' এর দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার

$ax^2 + bx + c = 0$ [a ($\neq 0$), b, c, বাস্তব সংখ্যা]

এখানে, a = 'x^2' এর সহগ

b = 'x' এর সহগ

c = ধ্রুবক পদ

উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad [\text{যেখানে, } b^2 - 4ac \geq 0]$$

ধরি, $\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ও $\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

এখন,

$$\alpha + \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b + \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}} - b - \cancel{\sqrt{b^2 - 4ac}}}{2a} = \frac{-\cancel{2}b}{\cancel{2}a}$$

$$\therefore \boxed{\alpha + \beta = -\frac{b}{a}}$$

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\dfrac{\text{'x' এর সহগ}}{\text{'}x^2\text{' এর সহগ}}$

আবার,

$$\alpha \times \beta = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)$$

$$= \frac{\left(-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right) \times \left(-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2}$$

বা, $\alpha \times \beta = \dfrac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \dfrac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \dfrac{\cancel{4a}c}{\cancel{4a^2}_{a}}$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $= \dfrac{\text{সমীকরণটি ধ্রুবক পদ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$

দুই বীজ প্রদত্ত থাকলে দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন :

মনেকরি, অজ্ঞাত রাশি 'x' এর দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ আকার $a^2 + bx + c = 0$ [a ($\neq 0$), b, c, বাস্তব সংখ্যা]

এখানে, a = 'x^2'-এর সহগ

b = 'x'-এর সহগ

c = ধ্রুবক পদ

ধরি, উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β।

এখন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ও সহগের সম্বন্ধ থেকে পাই,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{এবং} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$ax^2 + bx + c = 0$

উভয়পক্ষকে **a (≠ 0)** দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a} = \frac{0}{a}$$

বা, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

বা, $x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$

∴ x^2 – [বীজদ্বয়ের সমষ্টি] x + বীজদ্বয়ের গুণফল = 0 ... (i)

সুতরাং কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় দেওয়া থাকলে (i) নং সমীকরণের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণটি নির্ণয় করা যায়।

❖ প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি :

1. $ax^2 + bx + c = 0$ **[a (≠ 0), b, c, বাস্তব সংখ্যা]** দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ নির্ণয়ের শ্রীধর আচার্য-এর সূত্রটি হল,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

এক্ষেত্রে বীজ দুটি হল, $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ও $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. **বীজদ্বয়ের প্রকৃতি :**
   (i) নিরূপক শূন্য হলে অর্থাৎ $b^2 - 4ac = 0$ হলে, বীজদ্বয় বাস্তব ও সমান হবে।
   (ii) নিরূপক ধনাত্মক হলে অর্থাৎ $b^2 - 4ac > 0$ হলে, বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হবে।
   (iii) নিরূপক ঋণাত্মক হলে, $b^2 - 4ac < 0$ হলে বীজদ্বয় অবাস্তব বা কাল্পনিক ও অসমান হবে।

3. $ax^2 + bx + c = 0$ **[a (≠ 0), b, c, বাস্তব সংখ্যা]** সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হলে,

$$\alpha + \beta = -\frac{\text{'x' এর সহগ}}{\text{'}x^2\text{' এর সহগ}} = -\frac{b}{a}$$

এবং $\alpha\beta = \frac{\textbf{ধ্রুবক পদ}}{\mathbf{x^2}\textbf{-এর সহগ}} = \frac{c}{a}$

4. কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় α ও β হলে, সমীকরণটি হবে, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
   অর্থাৎ x^2 – [বীজদ্বয়ের যোগফল]x + বীজদ্বয়ের গুণফল = 0

❖ গুরুত্বপূর্ণ তথ্যাবলি :

1. একটি দ্বিঘাত সমীকরণের কেবলমাত্র দুটি বীজ থাকে। কোনো দ্বিঘাত সমীকরণের দুটির বেশি বীজ থাকতে পারে না।
2. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের ধ্রুবক পদ শূন্য হলে সমীকরণটির একটি বীজ শূন্য হবে এবং অপর বীজটি বাস্তব ও মূলদ হবে।
3. $ax^2 + bx + c = 0$ [$a \neq 0$] দ্বিঘাত সমীকরণের x-এর সহগ শূন্য অর্থাৎ $b = 0$ হলে সমীকরণটির বীজদ্বয় পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্নযুক্ত হবে।
4. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের x^2-এর সহগ শূন্য অর্থাৎ $a = 0$ হলে সমীকরনটি একটি একঘাত বা রৈখিক সমীকরণ হবে।
5. একঘাত বা রৈখিক সমীকরণের সাধারণ আকার, **$bx + c = 0$** **[b (≠ 0), c বাস্তব সংখ্যা]**

দ্বিঘাত সমীকরণের চিহ্নিতকরণ সংক্রান্ত প্রশ্ন

1. নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি দ্বিঘাত সমীকরণ কিনা যাচাই করো।

i. $(x + 2)^2 - 4x = 0$

ii. $(x + 1)(x + 7) - x(x + 3) = 17$

iii. $x(x + 1) - \frac{1}{x} = 2x + 5$

● **সমাধান**

i. $(x + 2)^2 - 4x = 0$

বা, $x^2 + \cancel{4x} + 4 - \cancel{4x} = 0$

বা, $x^2 + 4 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণে চলক x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 2।

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

ii. $(x + 1)(x + 7) - x(x + 3) = 17$

বা, $\cancel{x^2} + 7x + x + 7 - \cancel{x^2} - 3x = 17$

বা, $5x - 10 = 0$

বা, $5(x - 2) = 0$

বা, $x - 2 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণে চলক x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 1।

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি একঘাত (রৈখিক) সমীকরণ। সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ নয়।

iii. $x(x + 1) - \frac{1}{x} = 2x + 5$

বা, $\frac{x^2(x + 1) - 1}{x} = 2x + 5$

বা, $x^2(x + 1) - 1 = x(2x + 5)$

বা, $x^3 + x^2 - 1 = 2x^2 + 5x$

বা, $x^3 + x^2 - 1 - 2x^2 - 5x = 0$

বা, $x^3 - x^2 - 5x - 1 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণে চলক x-এর সর্বোচ্চ ঘাত 3।

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি একটি ত্রিঘাত সমীকরণ।

2. $x^{10} + 2x^5 + 1 = 0$ সমীকরণটি চলের কোন ঘাতের সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

● **সমাধান**

$x^{10} + 2x^5 + 1 = 0$

বা, $(x^5)^2 + 2x^5 + 1 = 0$

∴ প্রদত্ত সমীকরণটি চলের 5 ঘাতের অর্থাৎ x^5-এর সাপেক্ষে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ।

3. $(a - 5)x^2 + 3x + 7 = 0$ সমীকরণটি a-এর কোন মানের জন্য দ্বিঘাত সমীকরণ হবে না?

● **সমাধান**

প্রদত্ত সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ হবে না যদি x^2-এর সহগ শূন্য হয়।

∴ $a - 5 = 0$ বা, $a = 5$

সুতরাং, $a = 5$ হলে $(a - 5)x^2 + 3x + 7 = 0$ সমীকরণটি দ্বিঘাত সমীকরণ হবে না।

4. $(a-3)x^2+(a+1)x+1=0$ সমীকরণটি a এর কোন মানের জন্য একঘাত সমীকরণ হবে?

● **সমাধান**

যে সমীকরণকে $ax+b=0$ আকারে লেখা যায়, যেখানে a, b বাস্তব সংখ্যা এবং $a\neq 0$ তাকে একচলবিশিষ্ট একঘাত সমীকরণ বলা হয়।

প্রদত্ত সমীকরণটি একঘাত হলে x^2-এর সহগ শূন্য হবে।

$\therefore\ a-3=0$ বা, $a=3$

সুতরাং $a=3$ হলে $(a-3)x^2+(a+1)x+1=0$ সমীকরণটি একঘাত হবে।

5. $(x-3)(x-b)=x^2+2ax+9$ হয়, তবে a ও b-এর মান নির্ণয় করো।

● **সমাধান**

$(x-3)(x-b)=x^2+2ax+9$

বা, $x^2-bx-3x+3b=x^2+2ax+9$

বা, $x^2-(b+3)x+3b=x^2+2ax+9$

উভয়পক্ষের ধ্রুবকপদ এবং x-এর সহগ তুলনা করে পাই,

$3b=9$ $\qquad -(b+3)=2a$

$\therefore\ b=3$ $\qquad$ বা, $-(3+3)=2a$ $\qquad$ বা, $2a=-6$ $\qquad \therefore\ a=-3$

উৎপাদকে বিশ্লেষণ সংক্রান্ত প্রশ্ন

1. সমাধান করো : $\left(\frac{x-3}{x+3}\right)-\left(\frac{x+3}{x-3}\right)+6\frac{6}{7}=0$ $\quad [x\neq\pm 3]$

● **সমাধান**

$$\left(\frac{x-3}{x+3}\right)-\left(\frac{x+3}{x-3}\right)+6\frac{6}{7}=0$$

বা, $\dfrac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}+\dfrac{48}{7}=0$

বা, $\dfrac{(x^2-6x+9)-(x^2+6x+9)}{x^2-3^2}=-\dfrac{48}{7}$

বা, $\dfrac{\cancel{x^2}-6x+\cancel{9}-\cancel{x^2}-6x-\cancel{9}}{x^2-9}=-\dfrac{48}{7}$

বা, $\dfrac{\cancel{-}\cancel{12}x}{x^2-9}=\cancel{-}\dfrac{\overset{4}{\cancel{48}}}{7}$

বা, $7x=4(x^2-9)$

বা, $4x^2-36=7x$

বা, $4x^2-7x-36=0$

বা, $4x^2-(16-9)x-36=0$

বা, $4x^2-16x+9x-36=0$

বা, $4x(x - 4) + 9(x - 4) = 0$

বা, $(x - 4)(4x + 9) = 0$

হয়,	অথবা,
$x - 4 = 0$	$4x + 9 = 0$
বা, $x = 4$	বা, $x = -\frac{9}{4}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান, $x = 4$ ও $x = -\frac{9}{4}$

2. সমাধান করো : $\mathbf{\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}}$ **[$x \neq 0, -(a + b)$; $(a + b) \neq 0$]**

● **সমাধান**

$$\frac{1}{a+b+x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x}$$

বা, $\frac{1}{a+b+x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

বা, $\frac{x-(a+b+x)}{x(a+b+x)} = \frac{b+a}{ab}$

বা, $\frac{\cancel{x} - a - b - \cancel{x}}{x(a+b+x)} = \frac{b+a}{ab}$

বা, $\frac{-\cancel{(a+b)}}{x(a+b+x)} = \frac{\cancel{(a+b)}}{ab}$ [$\because$ **$(a + b) \neq 0$**]

বা, $\frac{-1}{ax+bx+x^2} = \frac{1}{ab}$

বা, $-ab = ax + bx + x^2$

বা, $x^2 + ax + bx + ab = 0$

বা, $x(x + a) + b(x + a) = 0$

বা, $(x + a)(x + b) = 0$

হয়,	অথবা,
$x + a = 0$	$x + b = 0$
বা, $x = -a$	বা, $x = -b$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান, $x = -a$ ও $x = -b$

3. সমাধান করো : $\mathbf{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}}$ **[$x \neq 0, -b$; $b \neq 0$]**

● **সমাধান**

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+b}$$

বা, $\frac{\cancel{x} + b - \cancel{x}}{x(x+b)} = \frac{\cancel{a} + b - \cancel{a}}{a(a+b)}$

বা, $\frac{\cancel{b}}{x^2+bx} = \frac{\cancel{b}}{a^2+ab}$ [$\because$ **$b \neq 0$**]

বা, $x^2 + bx = a^2 + ab$

বা, $x^2 + bx - ab - a^2 = 0$

বা, $x^2 - a^2 + bx - ab = 0$

বা, $(x - a)(x + a) + b(x - a) = 0$

বা, $(x - a)(x + a + b) = 0$

হয়,

$x - a = 0$

বা, $x = a$

অথবা,

$x + a + b = 0$

বা, $x = - a - b$

বা, $x = -(a + b)$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান, $x = a$ ও $x = -(a + b)$

শ্রীধর আচার্য-এর সূত্র সংক্রান্ত প্রশ্ন

1. $3x^2 + (x + 1)(2x + 3) = 5x(x + 4)$ এই সমীকরণের সমাধানে শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করা যায় কী? যুক্তি দিয়ে বিচার করো।

● **সমাধান**

$3x^2 + (x + 1)(2x + 3) = 5x(x + 4)$

বা, $3x^2 + 2x^2 + 3x + 2x + 3 = 5x^2 + 20x$

বা, $\cancel{5x^2} + 5x + 3 - \cancel{5x^2} - 20x = 0$

বা, $3 - 15x = 0$

বা, $15x - 3 = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটি চলরাশি x-এর একটি একঘাত (রৈখিক) সমীকরণ।

তাই এক্ষেত্রে শ্রীধর আচার্যের সূত্র ব্যবহার করা যাবে না।

2. নিম্নলিখিত দ্বিঘাত সমীকরণগুলি শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে সমাধান করো।

i. $(x - 2)(x + 4) + 9 = 0$

ii. $10x^2 - x - 3 = 0$

● **সমাধান**

i. $(x - 2)(x + 4) + 9 = 0$

বা, $x^2 - 2x + 4x - 8 + 9 = 0$

বা, $x^2 + 2x + 1 = 0$

এখন $x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 2, c = 1$

শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4.1.1}}{2.1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2}$$

হয়,

$$x = \frac{-2 + 0}{2}$$

অথবা,

$$x = \frac{-2 - 0}{2}$$

বা, $x = \frac{-2}{2}$ বা, $x = \frac{-2}{2}$

$\therefore x = -1$ $\therefore x = -1$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান, $x = -1$ ও $x = -1$।

ii. $10x^2 - x - 3 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 10, b = -1, c = -3$

শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.10.(-3)}}{2 \times 10}$$

$$= \frac{+1 \pm \sqrt{1 + 120}}{20} = \frac{+1 \pm 11}{20}$$

হয়, অথবা,

$x = \frac{+1+11}{20}$ $x = \frac{+1-11}{20}$

বা, $x = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{20}_{5}}$ বা, $x = \frac{-1\cancel{0}}{2\cancel{0}}$

বা, $x = \frac{3}{5}$ বা, $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকরণটির সমাধান, $x = -\frac{1}{2}$ ও $x = \frac{3}{5}$।

3. দুটি ক্রমিক ধনাত্মক অযুগ্ম সংখ্যার গুণফল 143। সমীকরণ গঠন করে শ্রীধর আচার্যের সূত্র প্রয়োগ করে অযুগ্ম সংখ্যা দুটি নির্ণয় করো।

- **সমাধান**

মনেকরি, অযুগ্ম সংখ্যা দুটি হল x ও $x + 2$, যেখানে ক্ষুদ্রতরটি x।

প্রশ্নানুসারে,

$x(x + 2) = 143$

বা, $x^2 + 2x = 143$

বা, $x^2 + 2x - 143 = 0$

এখন $x^2 + 2x - 143 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 1, b = 2, c = -143$

শ্রীধর আচার্যের সূত্র থেকে পাই,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4.(1)(-143)}}{2.1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

হয়,

$$x = \frac{-2+24}{2} = \frac{\overset{11}{\cancel{22}}}{\cancel{2}}$$

$\therefore \quad x = 11$

অথবা,

$$x = \frac{-2-24}{2} = \frac{\overset{13}{-\cancel{26}}}{\cancel{2}}$$

$\therefore \quad x = -13$

প্রশ্নানুসারে, $x = -13$ হতে পারে না, যেহেতু অযুগ্ম সংখ্যা দুটি ধনাত্মক।

$\therefore$ নির্ণেয় অযুগ্ম সংখ্যা দুটি হল 11 ও $(11 + 2) = 13$

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত প্রশ্ন

1. $x^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$ সমীকরণটির অমূলদ বীজটি নির্ণয় করো।

- **সমাধান**

$$x^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$$

বা, $x^2 - 2x - \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $x(x-2) - \sqrt{3}(x-2) = 0$

বা, $(x-2)\left(x-\sqrt{3}\right) = 0$

হয়,

$x - 2 = 0$

বা, $x = 2$

অথবা,

$x - \sqrt{3} = 0$

বা, $x = \sqrt{3}$

$\therefore$ $x^2 - \left(2+\sqrt{3}\right)x + 2\sqrt{3} = 0$ সমীকরণটির অমূলদ বীজটি হল '$\sqrt{3}$'।

2. k এর মান কত হলে, $kx^2 - (2k-1)x + k = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে।

- **সমাধান**

$kx^2 - (2k-1)x + k = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান।

অর্থাৎ নিরূপক $= 0$

বা, $b^2 - 4ac = 0$

বা, $[-(2k-1)]^2 - 4.k.k = 0$

বা, $(2k-1)^2 - 4k^2 = 0$

প্রদত্ত সমীকরণকে $ax^2+bx+c=0$-এর সঙ্গে তুলনা করে পাই,

$a = k$

$b = -(2k-1)$

$c = k$

বা, $\cancel{4k^2} - 4k + 1 - \cancel{4k^2} = 0$

বা, $-4k + 1 = 0$

বা, $\cancel{-}4k = \cancel{-}1$

$\therefore \quad k = \frac{1}{4}$

$\therefore \quad k = \frac{1}{4}$ হলে $kx^2 - (2k-1)x + k = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় সমান হবে।

3. $(1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0$ **দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি বাস্তব ও সমান হলে, প্রমাণ করো, $c^2 = a^2(1 + m^2)$।**

● **সমাধান**

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুটি বাস্তব ও সমান হলে, নিরূপক = 0 হবে।

এক্ষেত্রে $A = (1 + m^2); B = 2mc; C = (c^2 - a^2)$ [প্রদত্ত সমীকরণকে $Ax^2 + Bx + C = 0$ এর সঙ্গে তুলনা করে পাই]

এখন, নিরূপক = 0

বা, $B^2 - 4AC = 0$

বা, $(2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - a^2) = 0$

বা, $4m^2c^2 - 4(c^2 - a^2 + m^2c^2 - m^2a^2) = 0$

বা, $\cancel{m^2c^2} - c^2 + a^2 - \cancel{m^2c^2} + m^2a^2 = 0$

বা, $-c^2 = -a^2 - m^2a^2$

বা, $-c^2 = -a^2 - m^2a^2$

বা, $\cancel{-}c^2 = \cancel{-}a^2(1 + m^2)$

$\therefore$ $c^2 = a^2 (1 + m^2)$ [প্রমাণিত]

4. $3y^2 - py + 3 = 0$ **সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান হলে, p এর মান নির্ণয় করো।**

● **সমাধান**

$3y^2 - py + 3 = 0$ সমীকরণটিকে $ay^2 + by + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 3, b = -p, c = 3$

প্রশ্নানুসারে,

$3y^2 - py + 3 = 0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ও অসমান।

$\therefore$ নিরূপক $(b^2 - 4ac) > 0$

বা, $(-p)^2 - 4.(3).(3) > 0$

বা, $p^2 - 36 > 0$

বা, $(p - 6)(p + 6) > 0$

$\therefore$ $p > 6$ বা, $p < -6$

5. $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$ **সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতি নির্ণয় করো।**

● **সমাধান**

$2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a = 2, b = -\sqrt{3}, c = 2$

এখন, নিরূপক

$= b^2 - 4ac = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4.(2)(2)$

$= 3 - 16 = -13$

এক্ষেত্রে, নিরূপক $= -13 < 0$

$\therefore$ $2x^2 - \sqrt{3}x + 2 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় অবাস্তব ও অসমান হবে।

6. a, b, c মূলদ, $a + b + c = 0$ এবং $a \neq 0$ হলে দেখাও যে, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও মূলদ হবে।

● **সমাধান**

$a + b + c = 0$ .... (i)

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের,

নিরূপক

$= b^2 - 4ac$

$= [-(a + c)]^2 - 4ac$ [$b = -(a + c)$ ...(i) থেকে পাই]

$= (a + c)^2 - 4ac$

$= (a - c)^2$ [$\because (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2$]

এখন, কোনো রাশির বর্গের মান ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ নিরূপক ≥ 0

$\therefore$ $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় বাস্তব ও মূলদ হবে।

দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ ও সহগের সম্বন্ধ ও দুটি বীজ প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন সম্পর্কিত প্রশ্ন

1. যদি $(a - 4)x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ 1 হয়, তাহলে a-এর মান নির্ণয় করো।

● **সমাধান**

$(a - 4)x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ 1, অর্থাৎ $x = 1$, সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

এক্ষেত্রে, $(a - 4).1^2 + 2.1 + 1 = 0$

বা, $(a - 4) + 2 + 1 = 0$

বা, $a - 4 = -3$

বা, $a = 4 - 3$

$\therefore$ $a = 1$

যদি $(a - 4)x^2 + 2x + 1 = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ 1 হয়, তাহলে a-এর মান 1 হবে।

2. $5x^2 - 3x + 6 = 0$ সমীকরণের বীজদ্বয় α এবং β হলে,

i. $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)$ ii. $2(\alpha^2 + \beta^2)$ এর মান নির্ণয় করো।

● **সমাধান**

$5x^2 - 3x + 6 = 0$ .... (i)

এক্ষেত্রে, $a = 5, b = -3, c = 6$ [প্রদত্ত সমীকরণকে $ax^2 + bx + c = 0$-এর সঙ্গে তুলনা করে পাই]

(i) নং সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

$\therefore$ $\alpha + \beta = \frac{-(-3)}{5} = \frac{3}{5}$

ii) নং সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল $= \alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore$ $\alpha\beta = \frac{6}{5}$

i) $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ii) $2(\alpha^2 + \beta^2)$

$= \dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$ $\qquad\qquad$ $= 2[(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta]$

$= \dfrac{\frac{3}{\cancel{5}}}{\frac{6}{\cancel{5}}}$ $\qquad\qquad$ $= 2\left[\left(\dfrac{3}{5}\right)^2 - 2.\dfrac{6}{5}\right]$

$= \dfrac{\cancel{3}}{\cancel{6}_2}$ $\qquad\qquad$ $= 2\left[\dfrac{9}{25} - \dfrac{12}{5}\right]$

$= \dfrac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $= 2\left(\dfrac{9-60}{25}\right) = 2\times\dfrac{(-51)}{25} = \dfrac{-102}{25}$

3. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির একটি বীজ অপরটির দ্বিগুণ হলে, দেখাও যে, $2b^2 = 9ac$।

- **সমাধান**

$ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

ধরি, (i) নং সমীকরণের বীজদ্বয়, α ও 2α

বীজদ্বয়ের সমষ্টি,

$\alpha + 2\alpha = \dfrac{-b}{a}$

বা, $3\alpha = \dfrac{-b}{a}$

বা, $\alpha = \dfrac{-b}{3a}$ .... (ii) নং সমীকরণ

আবার, বীজদ্বয়ের গুণফল,

$\alpha.2\alpha = \dfrac{c}{a}$

বা, $2\alpha^2 = \dfrac{c}{a}$

বা, $2\left(\dfrac{-b}{3a}\right)^2 = \dfrac{c}{a}$

বা, $2.\dfrac{b^2}{9a^2} = \dfrac{c}{\cancel{a}}$ [ii নং থেকে পাই, $\alpha = -\dfrac{b}{3a}$]

$\therefore$ $2b^2 = 9ac$ [প্রমাণিত]

4. $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের অনুপাত $1 : r$ হয়, তবে দেখাও যে $\dfrac{(r+1)^2}{r} = \dfrac{b^2}{ac}$ ।

- **সমাধান**

$ax^2 + bx + c = 0$ ... ... (i)

ধরি, (i) নং সমীকরণের বীজদ্বয়, α ও $r\alpha$

বীজদ্বয়ের সমষ্টি,

$\alpha + r\alpha = \dfrac{-b}{a}$

বা, $\alpha(1 + r) = \dfrac{-b}{a}$

উভয়পক্ষকে বর্গ করে পাই,

$[\alpha(1 + r)]^2 = \left(\frac{-b}{a}\right)^2$

বা, $\alpha^2(1 + r)^2 = \frac{b^2}{a^2}$ ... ... (ii)

এখন (i) নং সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল, $\alpha.r\alpha = \frac{c}{a}$

বা, $r\alpha^2 = \frac{c}{a}$ .... (iii)

(ii) নং সমীকরণকে (iii) নং সমীকরণ দিয়ে ভাগ করে পাই,

$$\frac{\cancel{\alpha^2}(1+r)^2}{r\cancel{\alpha^2}} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} \quad \text{বা, } \frac{(1+r)^2}{r} = \frac{b^2}{\cancel{a^2}_{a}} \times \frac{\cancel{a}}{c}$$

$\therefore \frac{(r+1)^2}{r} = \frac{b^2}{ac}$ [প্রমাণিত]

বাস্তব সমস্যামূলক প্রশ্নাবলি ও তার সমাধান

1. কলমের মূল্য প্রতি ডজনে 6 টাকা কমলে 30 টাকায় আরও 3টি বেশি কলম পাওয়া যাবে। কলমের দাম কমার পূর্বে প্রতি ডজন কলমের মূল্য নির্ণয় করো।

- **সমাধান**

ধরি, দাম কমার পূর্বে প্রতি ডজন কলমের মূল্য x টাকা।

এখন 6 টাকা কমলে প্রতি ডজন কলমের মূল্য হবে (x – 6) টাকা।

আগে 30 টাকায় কলম পাওয়া যেত $\frac{30}{x}$ ডজন $= \frac{30}{x} \times 12$টি [যেহেতু 1 ডজন = 12 টি]

আর এখন 30 টাকায় পাওয়া যাবে,

$\frac{30}{x-6}$ ডজন কলম $= \frac{30}{(x-6)} \times 12$ টি কলম

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{30 \times 12}{(x-6)} - \frac{30 \times 12}{x} = 3$$

বা, $360\left[\frac{\cancel{x} - \cancel{x} + 6}{x(x-6)}\right] = 3$

বা, $360 \times \overset{2}{\cancel{6}} = \cancel{3}\left(x^2 - 6x\right)$

বা, $x^2 - 6x - 720 = 0$

বা, $x^2 - (30 - 24)x - 720 = 0$

বা, $x^2 - 30x + 24x - 720 = 0$

বা, $x(x - 30) + 24(x - 30) = 0$

বা, $(x - 30)(x + 24) = 0$

হয়, | অথবা,

$x - 30 = 0$ | $x + 24 = 0$

$\therefore\ x = 30$ | $\therefore\ x = -24$

কিন্তু কলমের মূল্য ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ কমার পূর্বে প্রতি ডজন কলমের মূল্য ছিল 30 টাকা।

2. 600 কিমি দূরত্ব যেতে একটি সুপার ফাস্ট ট্রেন একটি এক্সপ্রেস ট্রেন অপেক্ষা 3 ঘণ্টা কম সময় নেয়। দুটি ট্রেনের গতিবেগের পার্থক্য ঘণ্টায় 10 কিমি হলে, ট্রেন দুটির গতিবেগ নির্ণয় করো।

- **সমাধান**

মনেকরি এক্সপ্রেস ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় x কিমি।

সুপারফাস্ট ট্রেনের গতিবেগ ঘণ্টায় $(x + 10)$ কিমি।

এখন 600 কিমি দূরত্ব যেতে এক্সপ্রেস ট্রেনের সময় লাগে $\frac{600}{x}$ ঘণ্টা

এবং 600 কিমি দূরত্ব যেতে সুপার ফাস্ট ট্রেনের সময় লাগে $\frac{600}{x+10}$ ঘণ্টা

প্রশ্নানুসারে,

$$\frac{600}{x} - \frac{600}{x+10} = 3$$

বা, $600\left[\frac{\cancel{x}+10-\cancel{x}}{x(x+10)}\right] = 3$

বা, $\overset{200}{\cancel{600}} \times 10 = \cancel{3}(x^2 + 10x)$

বা, $x^2 + 10x - 2000 = 0$

বা, $x^2 + (50 - 40)x - 2000 = 0$

বা, $x^2 + 50x - 40x - 2000 = 0$

বা, $x(x + 50) - 40(x + 50) = 0$

বা, $(x + 50)(x - 40) = 0$

হয়, | অথবা,

$x + 50 = 0$ | $x - 40 = 0$

বা, $x = -50$ | বা, $x = 40$

এখন ট্রেনের গতিবেগ ঋণাত্মক হতে পারে না।

$\therefore$ এক্সপ্রেস ট্রেনের গতিবেগ = 40 কিমি / ঘণ্টা

এবং সুপার ফাস্ট ট্রেনের গতিবেগ = (40 + 10) কিমি/ঘণ্টা = 50 কিমি/ঘণ্টা।

3. যদি একটি অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যার পাঁচগুণ তার বর্গের দ্বিগুণ অপেক্ষা 3 কম হয়, তবে সংখ্যাটি নির্ণয় করো।

- **সমাধান**

মনেকরি, অখণ্ড ধনাত্মক সংখ্যাটি হল 'x'

প্রশ্নানুসারে,

$5x = 2x^2 - 3$

বা, $2x^2 - 5x - 3 = 0$

বা, $2x^2 - (6 - 1)x - 3 = 0$

বা, $2x^2 - 6x + x - 3 = 0$

বা, $2x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$

বা, $(x - 3)(2x + 1) = 0$

হয়,	অথবা,
$x - 3 = 0$	$2x + 1 = 0$
বা, $x = 3$	বা, $x = -\frac{1}{2}$

যেহেতু সংখ্যাটি ধনাত্মক এবং অখণ্ড তাই সংখ্যাটি $-\frac{1}{2}$ হতে পারে না।

$\therefore$ সংখ্যাটি হল '3'।